I a) $E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}\ eV$; $\mu \simeq m_e$

I b) $\mu(\mu p) = \frac{m_\mu m_p}{m_\mu + m_p} = \frac{207 m_e \times 1836 m_e}{207 m_e + 1836 m_e} = 186\ m_e$

$$E_n(\mu p) = + E_n \frac{\mu(\mu p)}{\mu} = 186 \times E_n$$

$$E_1(\mu p) = -2530\ eV \ ; \ E_2(\mu p) = -632,5\ eV$$

I c) Eq. classique du modèle de Bohr :

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

quantification : $\mu v r = n\hbar$

$\mu v^2 r = e^2$, $v_n = \frac{e^2}{\mu v r} = \frac{e^2}{n\hbar}$,

$r = \frac{e^2}{\mu v_n^2} = n^2 \frac{\hbar^2}{\mu e^2} = n^2 a_0$ $\quad a_0 = 0,529\ 10^{-10}\ m$

I d) $r_1(\mu p) = a_0 \frac{\mu}{\mu(\mu p)} = \frac{a_0}{186} = 2,84\ 10^{-13}\ m$

$$r_2(\mu p) = 4 \times 2,84\ 10^{-13}\ m = 11,36\ 10^{-13}\ m$$

1.

$$\frac{W_V}{T} = \frac{\mathbf{p}^4}{8m_e^3c^2}\frac{2m_e}{\mathbf{p}^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{4m_e^2c^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \tag{1}$$

Pour l'atome d'hydrogène, on a[4] : $v/c = \alpha$, avec $\alpha = 1/137$. La relation (1) s'écrit :

$$\frac{W_V}{T} \simeq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{137}\right)^2 = 1.3 \times 10^{-5} \tag{2}$$

2. Le terme de couplage spin-orbite W_{SO}, donné par (11.1.28), fait intervenir le produit $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$. La valeur propre de L_z est égale à $\hbar m$ et celle de S_z à $\pm\hbar/2$; la grandeur de $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ est donc de l'ordre de $\hbar^2$ et on peut écrire :

$$W_{SO} \simeq \frac{e^2}{2m_e^2c^2}\frac{1}{R^3}\hbar^2 \tag{3}$$

Choisissons R égal au rayon de Bohr, $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$, d'où :

$$\frac{W_{SO}}{U} = \frac{e^4}{2\hbar^2c^2} = \frac{\alpha^2}{2} = 2.6 \times 10^{-5} \tag{4}$$

3. La valeur moyenne du terme de Darwin, donnée par (11.1.31), est proportionnelle à $|\psi(0)|^2$. L'ordre de grandeur de $|\psi(0)|^2$ s'obtient en écrivant :

$$\int |\psi(\mathbf{r})|^2\, d^3r = 1 \simeq |\psi(0)|^2 \mathcal{V}_0 \tag{5}$$

où $\mathcal{V}_0$ est le volume d'intégration physiquement pertinent et où l'on peut considérer que $\psi(\mathbf{r}) \simeq \psi(0)$. Pour un volume d'intégration formé par une sphère de rayon $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$, on a : $\mathcal{V}_0 = 4\pi a_0^3/3$ et la relation (5) donne :

$$|\psi(0)|^2 = \frac{3m_e^3e^6}{4\pi\hbar^6} \tag{6}$$

La valeur moyenne du terme de Darwin devient, compte tenu de (6) :

$$\langle W_D\rangle = \frac{\pi e^2\hbar^2}{2m_e^2c^2}|\psi(0)|^2 = \frac{3m_e e^8}{8\hbar^4c^2} = \frac{3}{8}m_e c^2\alpha^4 \tag{7}$$

On a : $\langle H_0\rangle \simeq m_e c^2\alpha^2$, d'où :

$$\frac{\langle W_D\rangle}{\langle H_0\rangle} \simeq \frac{3}{8}\alpha^2 = 2 \times 10^{-5} \tag{8}$$

Les énergies dues à l'hamiltonien non relativiste H_0 de l'atome d'hydrogène étant de l'ordre de 10 eV, on voit que tous les termes de structure fine sont environ 10^4 fois plus petits que ces énergies.